

Постановка задачи локализации корней уравнения.

Численные методы решения уравнений

Локализация корней уравнения — это процесс определения промежутков (отрезков), в которых содержится один и только один корень уравнения $f(x) = 0$. Это первый этап приближённого нахождения корней, за которым следует уточнение корня с заданной точностью.

Постановка задачи локализации корней

Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — алгебраическая или трансцендентная функция. Нелинейная функция $f(x)$ в области определения $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ может иметь конечное или бесконечное количество нулей либо не иметь их вообще.

Цель локализации — найти такие отрезки $[a, b]$ из области определения функции $f(x)$, что на каждом из них содержится только один корень уравнения.

Универсального алгоритма локализации корня не существует. На практике часто используют следующие подходы:

- **Графический метод.** Построение графика функции $y = f(x)$ позволяет визуально определить промежутки, где график пересекает ось абсцисс, то есть где находятся нули функции. Если построение графика затруднительно, иногда удобно преобразовать уравнение к виду $f_1(x) = f_2(x)$ и построить графики обеих функций. Абсциссы точек пересечения будут соответствовать корням исходного уравнения.

- **Аналитический способ.** Используют теорему о том, что непрерывная строго монотонная функция $f(x)$ имеет единственный нуль на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков. Достаточным признаком монотонности функции на отрезке является сохранение знака её производной.

- Физические соображения. Отрезок локализации может быть найден с учётом специфики конкретной задачи.

Численные методы решения уравнений

Численные методы решения уравнений делятся на прямые и итерационные.

Прямые методы позволяют получить решение за конечное, заранее определённое число арифметических действий.

Итерационные методы — это методы последовательных приближений. Они заключаются в построении числовой последовательности $x^{(k)}$ (где $k = 0, 1, 2, \dots$), сходящейся к искомому корню уравнения.

Некоторые итерационные методы:

- Метод половинного деления (метод бисекций). Простой и надёжный метод, который всегда сходится. Алгоритм заключается в последовательном делении отрезка пополам и выборе того из них, на концах которого функция принимает значения разных знаков.

- Метод Ньютона (метод касательных). Основан на построении итерационной последовательности с использованием касательной к кривой $y = f(x)$.

- Метод простых итераций. Уравнение $f(x) = 0$ преобразуется к виду $x = g(x)$, после чего строится итерационная последовательность $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$.

Выбор метода зависит от свойств функции, требуемой точности и других факторов. Для реализации численных методов часто используются специальные программные среды (например, MATLAB, MathCAD).